唯一の極大部分加群を持つ射影加群について
ON PROJECTIVE MODULE WITH UNIQUE MAXIMAL SUBMODULE

MASAHISA SATO (佐藤眞久)

Abstract. In this paper, we investigate a projective module with unique maximal submodule. We show that this projective module is indecomposable. To show this fact, we prove the following two properties.
(1) There are two possibilities for a projective module P with unique maximal submodule. That is, P is indecomposable or P has a direct decomposition $P = P_1 \oplus P_2$ such that P_1 has unique maximal submodule and P_2 does not have any maximal submodule.
(2) Nakayama-Azumaya Lemma holds for any projective modules [2, 7]. This means that any nonzero projective module has a maximal submodule.

By similar observation, we will know that a module with unique maximal submodule is indecomposable and Nakayama-Azumaya Lemma will hold for a direct summand of a direct sum of finitely generated modules [9].

In the last part of this paper, we give a characterization for P to be finitely generated by using the property of a generating set of P.

1. 序章 (Introduction)

この報告集では、環は単位元を持ち、加群は特に断らない限り右加群とする。射影加群に関する問題として、1971 年に R. Ware の論文 [11] で提起されたものがある。これは、唯一の極大部分加群を持つ射影加群は局所加群であるか、すなわち、最大の極大部分加群を持つ加群であるか、という問題である。この報告集での話題は、この問題に関する考察を出発点にしたものである。シンポジュームでの最中に、山口大学の倉富要輔先生に、この問題は [1] で否定的であると書かれていると教えて頂いた。しかし、この論文では、ある条件を満たす射影加群が無数に作られることから否定的と言っているが、この条件を満たす加群の存在は、別の古い論文で述べているということで、これは現時点では著者には確認できていない。そこで、最後の章の例 5.2 で、この条件を満たす加群の例を構成した。しかし、この例から [1] の結果が本当に正しいのか疑問点が幾つか生じている。この点を指摘し挙げておくので、興味ある読者は検証を試みて欲しい。

この報告集の 4 章で、Ware の問題が肯定的である必要十分条件を生成系の性質で述べている。Ware の問題が否定的であるということは、ここで述べる生成系を持つ射影加群を構成できることに対応する。

この報告集では、唯一の極大部分加群を持つ射影加群は直既約であることを示す。R.Ware の問題が否定的なら、直既約性は自明でないので、この結果は大きな意味を持つ。適当な

Key Words: Projective module, Unique maximal submodule, Azumaya-Nakayama Lemma, Ware's Problem, Primitive right ideal.

2010*Mathematics Subject Classification*: Primary 08B30, 16D40, 16W99; Secondary 08A05, 16N20, 16U99.

The final version of this paper has been submitted for publication elsewhere.

条件を付けて肯定的になる場合に、証明を与える為の大きな足がかりを与える事実であろう。いずれにしても、この事実は意味があると言える。
直既約性を示すため、次の構造定理を示す。

定理 3.1 射影加群 P が唯一の極大部分加群を持つとすると次の 2 つのいずれかが成り立つ。
(1) P は直既約である。
(2) P は零でない 2 つの加群の直和 $P = P_1 \oplus P_2$ であり、P_2 は唯一の極大部分加群を持ち、P_1 は極大部分加群を持たない加群である。

この証明を改良すると、射影加群であることを仮定しなくても、上記の定理の結果が成り立つことがわかる [9]。

所で、射影加群については、中山・東屋の補題が成立する [2, 7]。すなわち、次の定理が成り立つ。

定理 3.3 環 R の Jacobson 根基を $J(R)$ とする。射影加群 P が $PJ(R) = P$ を満たせば、$P = 0$ である。

この定理の証明を改良すると、有限生成加群の直和の直和因子についても中山・東屋の補題が成立することがわかる [9]。

上記の定理から、零でない射影加群は極大部分加群を必ず持つので、次の定理が成り立つ。

定理 3.4 射影加群 P が唯一の極大部分加群を持つとすると P は直既約である。

射影加群でない場合は、唯一の極大部分加群を持っても、これが最大の極大部分加群ではないものがあり、「射影的」という条件は外せない。このような例を例 2.6 で紹介する。
R.Ware の問題に関連して次のことを注意しておく。

定理. P が有限生成加群のとき、次は同値である。
(1) ある局所巾等元 $e \in R$ で $P = eR$ となる。
(2) $\mathrm{End}_R(P)$ は局所環、すなわち、P は完全直既約加群である。
(1) P は唯一つの極大部分加群を持つ。
(2) P は最大の極大部分加群を持つ。

2. 右原始環 (RIGHT PRIMITIVE RING)

この節では幾つかの定義と基本定理を復習しておく。

定義 2.1. 環 R は、忠実かつ単純な右加群を持つとき**右原始環** (right primitive ring) と呼ばれる。R の両側イデアル T は、剰余環 R/T が右原始環となるとき**原始右イデアル**と呼ばれる。
R の **Jacobson 根基** $J(R)$ とは、全ての R の極大右（左）イデアルの共通集合である。さらに、$J(R)$ は全ての原始右（左）イデアルの共通集合でもある。（詳細は [6] 第 II 章定理 12 或いは [3] 第 1 章等を参照されたい。）
M を環 R 上の右加群、S を M の部分集合とする。S の R での**右零化イデアル**は $\mathrm{Ann}_R(S) = \{r \in R \,|Sr = 0\}$ で定義される。

注意 2.2. 原始右イデアル T と忠実単純右 R/T 加群 R/J の関係は $T = \mathrm{Ann}_R(R/J)$ で与えられる。したがって、T は J に含まれる両側イデアルよりなる集合のなかで極大となるイデアルである。

また、$T = \bigcap_{I \in \Gamma} I = \bigcap_{I \in \Delta} I$ である。ここで、Γ は極大右イデアル I で $T \subset I$ を満たすものよりなる集合で、Δ は極大右イデアル I で $R/J \cong R/I$ を満たすものよりなる集合である。（詳細は [6] 第 2 章等を参照されたい。）

補題 2.3. 環 R 上の射影加群を P、その極大部分加群を L とする。J を極大右イデアルで $P/L \cong R/J$ を満たすものとする。また、原始右イデアルを $T = \mathrm{Ann}_R(R/J)$ とする。このとき、$PT \subset L$ であり、ある全射準同形 $P/PT \to R/J$ がある。

証明. $T = \mathrm{Ann}_R(R/J) = \mathrm{Ann}_R(P/L)$ なので、$PT \subset L$ である。よって、$0 \to L/PT \to P/PT \to P/L \to 0$ は短完全列となる。そこで、$P/L \cong R/J$ より、全射準同形 $P/PT \to R/J$ がある。 □

唯一の極大部分加群を持つ射影加群と原始右イデアルとの関係を示す命題を挙げておく。

命題 2.4. 環 R 上の射影加群 P の極大部分加群を L、J を極大右イデアルで $P/L \cong R/J$ を満たすものとする。$K = \mathrm{Ann}_R(R/J)$ に対して、次が成立する。

(1) J が両側イデアルなら $K = J$ で $L = PK$ である。
J が両側イデアルでないなら $PJ = P$ で $PK \subset L$ であり、ある全射準同形 $P/PK \to R/J$ がある。また、K は J に含まれる両側イデアルの中で極大である。

(2) $PK \subset L$ である。

(3) L が P の唯一の極大部分加群とする。このとき、$R/I \not\cong R/J$ となる極大イデアル I に対して、$PI = P$ が成立である。また、$I \neq K$ となる原始右イデアル I に対して、$PI = P$ である。

(4) $T = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$ を両側イデアル I_γ の共通集合とする。ここで、Γ は添え字集合である。
このとき、$PT = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} PI_\gamma$ である。

(5) 次の主張が成立する。
 (i) $T = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K^i$ に対し、$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} PK^i = PT$ である。
 (ii) Γ を原始右イデアル全体の集合とする。このとき、$\bigcap_{I \in \Gamma} PI = PJ(R)$ である。
 (iii) $L \supset PK = PJ(R)$ である。

(6) L が P の唯一の極大部分加群とすると、$L = PJ(R)$ である。

証明. P は射影加群なので、ある射影加群 Q との直和を取ることで、自由加群 $\sum_{\delta \in \Delta} \oplus R$ と同型、すなわち、$\sum_{\delta \in \Delta} \oplus R \cong P \oplus Q$ となる。ここで、同型は等号 $\sum_{\delta \in \Delta} \oplus R = P \oplus Q$ と考えても良いが、正確を期すため以下では、同型として進めていく。

(1) J が両側イデアルなら明らかに $K = J$ である。J が両側イデアルでないなら、補題 2.3 よりわかる。

両側イデアル T で $K \subset T \subset J$ となるものがあれば、$T \subset \mathrm{Ann}_R(R/J) = K$ となる。したがって、$T = K$ である。

(2) これは (1) をまとめたものである。

(3) I を R/J と R/I が非同型である極大右イデアルとする。I が両側イデアルでないなら、$RI = R$ で $PI = PRI = P$ である。I が両側イデアルで $PI \neq P$ なら、P/PI は半単純 R/I 加群である。すなわち、P/PI は R/I の幾つかの直和に同型である。よって、ある全射準同形 $f\colon\ P \to R/I$ がある。P は唯一の極大部分加群を持つので、$\ker f = L$ となる。そこで、$P/L \cong R/J$ であり R/I は R/J に同型となってしまい矛盾を生じる。

次に、I を原始右イデアルで K と異なるものとする。$PI \neq P$ と仮定する。T を $\mathrm{Ann}_R(R/T) = I$ となる極大右イデアルとする。このとき、R/I は上記と同様に、R/T の幾つかの直和になる。零でない準同形 $P/PI \to R/T$ があり、R/T は単純加群よりその核は P/PI の極大部分加群である。極大部分加群の唯一性より、L/PI と一致し、$R/T \cong (P/PI)\,(L/PI) \cong P/L \cong R/J$ となる。しかし、$K \neq I$ より $R/J \ncong R/T$ となり矛盾を生じる。よって $PI = P$ である。

(4) $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} PI_\gamma = PT$ を示す。$(\sum\limits_{t\in\Gamma} \oplus R)T = (P \oplus Q)T$ より $\sum\limits_{\delta\in\Delta} \oplus T = PT \oplus QT$ である。一方、$(\sum\limits_{\delta\in\Delta} \oplus R)I_\gamma = (P \oplus Q)I_\gamma$ から、各 $\gamma \in \Gamma$ に対し $\sum\limits_{\delta\in\Delta} \oplus I_\gamma = PI_\gamma \oplus QI_\gamma$ となる。このことから、次の 2 つの式が成り立つ。

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\sum_{\delta\in\Delta}\oplus I_\gamma = \sum_{\delta\in\Delta}\oplus\bigcap_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma \cong \sum_{\delta\in\Delta}\oplus T = \left(\sum_{\delta\in\Delta}\oplus R\right) T \cong PT \oplus QT,$$

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\sum_{\delta\in\Delta}\oplus I_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}\left(\sum_{\delta\in\Delta}\oplus R\right) I_\gamma \cong \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(PI_\gamma \oplus QI_\gamma) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} PI_\gamma \oplus \bigcap_{\gamma\in\Gamma} QI_\gamma.$$

この同型と $PT \subset \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} PI_\gamma$ および $QT \subset \bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} QI_\gamma$ から $\bigcap\limits_{\gamma\in\Gamma} PI_\gamma = PT$ がわかる。

(5) (i) および (ii) は (4) の特別な場合である。$J(R)$ は全ての原始右イデアルの共通集合より、$I \neq K$ となる両側イデアルで $PI = P$ となることから (4) より (iii) がいえる。

(6) Γ を極大右イデアル全体の集合とする。各極大右イデアル I に対し、$f_I\colon\ R \to R/I$ を自然な全射準同形とする。準同形 $f = (f_I)\colon\ R \to \sum\limits_{I\in\Gamma} \oplus R/I$ を考えると、$\ker f = \bigcap\limits_{I\in\Gamma} \ker f_I = J(R)$ より、$Im(f) \cong R/Kerf = R/J(R) \subset \sum\limits_{I\in\Gamma} \oplus R/I$ から、$R/J(R)$ は単純加群の直和、すなわち、半単純加群となる。$\sum\limits_{\delta\in\Delta} \oplus R = P \oplus Q$ より $(\sum\limits_{\delta\in\Delta} \oplus R)J(R) = (P \oplus Q)J(R)$、したがって、$\sum\limits_{\delta\in\Delta} \oplus J(R) = PJ(R) \oplus QJ(R)$ となるので、この部分加群による商加群をとり、$\sum\limits_{\delta\in\Delta} \oplus R/J(R) = P/PJ(R) \oplus Q/QJ(R)$ となる。よって、$P/PJ(R)$ は半単純加群となる。$P/PJ(R) = \sum\limits_{t\in T} \oplus S_t$ と単純加群 S_t の直和で表す。$f_t\colon\ P/PJ(R) \to S_t$ を S_t への射影である全射準同形とする。P は唯一の極大部分加群 L を持つので、$\ker f_t = L/PJ(R)$ である。一方、$0 = \bigcap\limits_{t\in T} \ker f_t = L/PJ(R)$ より、$L = PJ(R)$ である。 □

先の命題が意味する所を見るための例を挙げておく。

例 2.5. 局所巾等元 e_{ij} で、各 $i,\ j$ に対して $e_{i1}R \cong e_{ij}R$ および各 $s \neq t$ に対して $e_{s1} \ncong e_{t1}$ を満たすものからなる環 $R = \sum\limits_{i=1}^{m} \oplus \sum\limits_{j=1}^{m_i} \oplus e_{ij}R$ と右イデアル $J = e_{11}J(R) \oplus \sum\limits_{j=2}^{m_1} \oplus e_{1j}R \oplus$

$\sum\limits_{i=2}^{m}\oplus\sum\limits_{j=1}^{m_i}\oplus e_{ij}R \cong e_{11}J(R)\oplus(R/e_{11}R)$ を考える。$m_1 \geq 2$ と仮定すると、$RJ=R$ より、J は両側イデアルでなく、$K=\sum\limits_{j=1}^{m_1}\oplus e_{1j}J(R)\oplus\sum\limits_{i=2}^{m}\oplus\sum\limits_{j=1}^{m_i}\oplus e_{ij}R\cong\sum\limits_{j=1}^{m_1}\oplus e_{1j}J(R)\oplus R/(\sum\limits_{j=1}^{m_1}\oplus e_{1j}R)$ である。$m_1=1$ の場合は、J は両側イデアルである。

「唯一の極大部分加群を持つ」という性質は、森田同値で不変な性質である。すなわち、森田同値を与える関手 F とすると、P が唯一の極大部分加群を持つなら、$F(P)$ も唯一の極大部分加群を持つ。 □

次に、Ware の問題は、「射影的」という仮定が無ければ成立しない例を挙げる。

例 2.6. L を体とし、Z を基底 $\{v_x\ |0<x\leq 1\}$ とその間の積 $v_x\cdot v_y=v_{xy}$ で決まる可換 L 多元環とする。基底 $\{v_x\ |0<x<i\}$ よりなるイデアルを $J_i\ (0<i\leq 1)$、基底 $\{v_x\ |0<x\leq i\}$ よりなるイデアル (J_i の閉イデアル) を $\overline{J_i}$ とする。$Z\oplus J_1$ は唯一の極大部分加群 $J_1\oplus J_1$ を持つが、$0<i<1$ なる i では、$Z\oplus J_i$ を含む極大部分加群は存在しない。よって、$J_1\oplus J_1$ は最大の極大部分加群でない。

同様な加群をもう一つ与えてみる。Z 加群 $M=(Z/J_{\frac{1}{2}}\oplus J_1/J_{\frac{1}{2}})/L\{(v_{\frac{1}{2}},0)-(0,v_{\frac{1}{2}})\}$ を考えると、M は 唯一の極大部分加群 $H=(J_1/J_{\frac{1}{2}}\oplus J_1/J_{\frac{1}{2}})/L\{(v_{\frac{1}{2}},0)-(0,v_{\frac{1}{2}})\}$ を持つ。しかし、H は最大のイデアルではない。実際、M の部分加群 $T=(Z/J_{\frac{1}{2}}\oplus J_{\frac{3}{4}}/J_{\frac{1}{2}})/L\{(v_{\frac{1}{2}},0)-(0,v_{\frac{1}{2}})\}$ は H に含まれない。また、T を含む M の極大部分加群は存在しない。

剰余環 $Z/J_{\frac{1}{2}}$ を S とし、 S 上の加群 $J_1/J_{\frac{1}{2}}$ を U とおく。ここで、S の基底 $v_t+J_{\frac{1}{2}},(\frac{1}{2}\leq t\leq 1)$ を簡略のため同じ記号 v_t を用いることにする。このとき、$\frac{1}{2}\leq x<1$ となる x に対し、$x^t<\frac{1}{2}$ となる t があるので、$(v_1-v_x)(v_x+{v_x}^2+\cdots+{v_x}^{t-1})={v_1}^t-{v_x}^t=v_1$ と単位元になる。よって、任意の $v\in\sum\limits_{0<x<1}\oplus Lv_x$ に対し、v_1-v は逆元を持つ。したがって、S は局所環である。

さらに、U は部分加群として、$J_i/J_{\frac{1}{2}},(\frac{1}{2}\leq i\leq 1)$ および $\overline{J_i}/J_{\frac{1}{2}}$ を持つ単列加群であることを示してみる。U の自明でない部分加群を T とし、$s_1v_{x_1}+s_2v_{x_2}+\cdots+s_tv_{x_t}\in T, s_1,\ldots,s_t\neq 0$ となる $x_1,x_2,\ldots,x_t>\frac{1}{2}$ を集めた集合 Θ を考える。Θ は上に有界よりその上限を i とする。i が Θ の最大値でなければ、各 j で $x_j<i$ より、$s_1v_{x_1}+s_2v_{x_2}+\cdots+s_tv_{x_t}\in J_i/J_{\frac{1}{2}}$ である。よって、$T\subset J_i/J_{\frac{1}{2}}$ である。さらに、$\frac{1}{2}<x<i$ なる x に対し、$s_1v_{x_1}+s_2v_{x_2}+\cdots+s_tv_{x_t}\in T, s_1,\ldots,s_t\neq 0$ で、$x\leq x_1$ となるものがある。$x_1>x_2>\cdots>x_t$ としてよいので、$v_{\frac{x}{x_1}}$ を掛けて、$(v_1+\frac{s_2}{s_1}v_{\frac{x_2}{x_1}}+\cdots+\frac{s_t}{s_1}v_{\frac{x_t}{x_1}})v_x\in T$ である。$\frac{s_2}{s_1}v_{\frac{x_2}{x_1}}+\cdots+\frac{s_t}{s_1}v_{\frac{x_t}{x_1}}\in\mathrm{rad}(S)$ より、$v_1+\frac{s_2}{s_1}v_{\frac{x_2}{x_1}}+\cdots+\frac{s_t}{s_1}v_{\frac{x_t}{x_1}}$ は S の可逆元であったので、$v_x\in T$ となる。このことから、$J_i/J_{\frac{1}{2}}\subset T$ である。よって、$J_i/J_{\frac{1}{2}}=T$ が示された。

i が Θ の最大値なら、$s_1v_{x_1}+s_2v_{x_2}+\cdots+s_tv_{x_t}=s_1v_{\frac{x_1}{i}}v_i+s_2v_{\frac{x_2}{i}}v_i+\cdots+s_tv_{\frac{x_t}{i}}v_i$ より、これは $J_i/J_{\frac{1}{2}}$ に含まれる。よって、$T\subset\overline{J_i}/J_{\frac{1}{2}}$ である。さらに、$s_1v_{x_1}+s_2v_{x_2}+\cdots+s_tv_{x_t}\in T, s_1,\ldots,s_t\neq 0$ で、$x_1=i$ となるものがある。$\frac{1}{2}<x\leq i$ となる x に対し、$x_1>x_2>\cdots>x_t$ としてよいので、$v_{\frac{x}{x_1}}$ を掛けて、$(v_1+\frac{s_2}{s_1}v_{\frac{x_2}{x_1}}+\cdots+\frac{s_t}{s_1}v_{\frac{x_t}{x_1}})v_x\in T$ である。$v_1+\frac{s_2}{s_1}v_{\frac{x_2}{x_1}}+\cdots+\frac{s_t}{s_1}v_{\frac{x_t}{x_1}}$ は S の可逆元であったので、$v_x\in T$ となる。このことから、$\overline{J_i}/J_{\frac{1}{2}}\subset T$ である。よって、$\overline{J_i}/J_{\frac{1}{2}}=T$ が示された。 □

もう一つだけ例を挙げておく。これは、非射影加群で唯一の極大イデアル J に対して、$MJ \neq M$ で、他の極大イデアル I に対しては、$MI = M$ となる例である。(射影加群でこの例と同様な例は、次の章の例 3.5 で与える。)

例 2.7. $\mathbb{Z}$ を整数環とし、p を素数とする。p での局所化を $M = \mathbb{Z}_p$ とすると、$q \neq p$ となる素数 q に対し、$M \cdot (q) = M$ であり、$M \cdot (p)$ は M の最大の極大部分加群である。 □

3. 構造定理 (Structure Theorem)

命題 3.1. 環 R 上の射影加群 P が唯一の極大部分加群を持つとすると、次の 2 つのいずれかが成り立つ。

(1) P は直既約である。
(2) P は零でない 2 つの加群の直和 $P = P_1 \oplus P_2$ であり、P_2 は唯一の極大部分加群を持ち、P_1 は極大部分加群を持たない。

証明. P が直既約でないとすると P は零でない 2 つの直和因子 P_1 および P_2 で $P = P_1 \oplus P_2$ となる。もし、$P_1 \bigcap L \neq P_1$ すなわち、$P_1 \not\subset L$ なら L の極大性から $P_1 + L = P$ で $P_1/(P_1 \bigcap L) \cong (P_1 + L)/L = P/L$ となり、これは単純加群である。よって、$P_1 \bigcap L$ は P_1 に等しいか P_1 の極大部分加群である。同様に、$P_2 \bigcap L$ は P_2 に等しいか P_2 の極大部分加群である。

もし、$P_1 \bigcap L$ と $P_2 \bigcap L$ の両方が P_1 と P_2 でそれぞれ極大なら、$P_1 \oplus (P_2 \bigcap L)$ および $(P_1 \bigcap L) \oplus P_2$ は、P の異なる極大部分加群となり、極大部分加群の唯一性に矛盾する。

もし、$P_1 \bigcap L = P_1$ かつ $P_2 \bigcap L = P_2$ なら、$P_1 \subset L$ かつ $P_2 \subset L$ である。よって、$P = P_1 \oplus P_2 \subset L$ となり、$P = L$ で矛盾である。

そこで、$P_1 \bigcap L = P_1$ および $P_2 \bigcap L$ は P_2 の極大部分加群と仮定してよい。このとき、$L = P \bigcap L = (P_1 \oplus P_2) \bigcap L = P_1 \oplus (P_2 \bigcap L)$ である。もし、P_1 が極大部分加群 M を持てば、$M \oplus P_2$ は P の極大部分加群で L と異なる。したがって、P_1 は極大部分加群を持たない。もし、P_2 が $P_2 \bigcap L$ と異なる極大部分加群 M を持てば、$P_1 \oplus M$ は P の極大部分加群で L と異なる。したがって、$P_2 \bigcap L$ は、P_2 の唯一の極大部分加群である。 □

定理 3.2 ([2, 7])**.** 零でない射影加群は極大部分加群を持つ。

証明. 射影加群 P が極大部分加群を持たないとする。原始右イデアル I に対し、$PI = P$ であることに注意する。なぜなら、仮に $PI \neq P$ とすると、極大右イデアル T で I を含むイデアルで $I = \mathrm{Ann}_R(R/T)$ となるものがある。よって、補題 2.3 から、全射準同形 $f : P \to P/PI \to R/T$ があり、R/T が単純加群から P が極大部分加群 $\ker f$ を持つことになり、矛盾を生じる。

Γ を全ての原始右イデアルよりなる集合とすると、$PJ(R) = P \bigcap_{I \in \Gamma} I = \bigcap_{I \in \Gamma} PI = P$ から $P = PJ(R)$ である。

最後に $P = PJ(R) \neq 0$ から矛盾を出す。$\{p_\gamma \,|\gamma \in \Gamma\}$ を射影加群 P の生成元の集合とする。f を自由加群 $F = \sum_{\gamma \in \Gamma} \oplus R_\gamma$ から P への $f(e_\gamma) = p_\gamma$ で定義される全射準同形とする。ここで $R_\gamma = R$ および e_γ は γ 成分が 1 で他の成分が 0 の単位ベクトルである。P は射影加群より、ある準同形 $g : P \to F$ で $fg = 1_P$ となり、$g(p_\gamma)$ は、ある自然数 n_γ と $r_{\gamma_j} \in R$ を用いて、有限和 $\sum_{j=1}^{n_\gamma} e_{\gamma_j} r_{\gamma_j}$ の形で表される。ここで、$\gamma_1 = \gamma$ と仮定しても一般性を失わ

ない。$PJ(R)=P$ から $g(P)\subset\sum_{\gamma\in\Gamma}\oplus J(R)_\gamma = FJ(R)$ に注目すると r_j を $J(R)$ から選べる。よって、次の式が成り立つ。

$$p_\gamma = f(e_\gamma) = fgf(e_\gamma) = fg(p_\gamma) = f(\sum_{j=1}^{n_\gamma} e_j r_j) = \sum_{j=1}^{n_\gamma} f(e_{\gamma_j}) r_{\gamma_j}.$$

もし、$r_{\gamma_1} = 0$ なら、生成元の集合から p_γ を取り去ることができる。もし、$r_{\gamma_1} \neq 0$ なら、$p_{\gamma_1}(1-r_{\gamma_1}) = \sum_{j=2}^{n_\gamma} f(e_{\gamma_j})r_{\gamma_j}$ である。$r_{\gamma_1}\in J(R)$ から $1-r_{\gamma_1}$ は可逆より、$p_\gamma = \sum_{j=2}^{n_\gamma} f(e_{\gamma_j})r_{\gamma_j}(1-r_{\gamma_1})^{-1}$ であり、生成元の集合から p_γ を取り去ることができる。

上記の考察より、生成元の集合からいかなる元を取り去っても依然として生成元の集合である。 この事実を踏まえて、次のようにツォルンの補題を用いて証明を完成させる。

短完全列 $0\to Q\to \sum_{\gamma\in\Gamma}\oplus R_\gamma \xrightarrow{f} P\to 0$ を固定する。ここで、Γ は添え字集合で $R_\gamma = R$ とする。Δ を Γ の部分集合で、f の $\sum_{\delta\in\Delta}\oplus R_\delta$ への制限写像 f_Δ が全射準同形、すなわち、$0\to Q_\Delta\to\sum_{\delta\in\Delta}\oplus R_\delta \xrightarrow{f_\Delta} P\to 0$ が分解短完全列となるものとする。ここで、(P,Q_Δ) の組の集合で上の短完全列に現れるもの集合全体を考える。そして、この集合への順序を、$\Delta_1\supset\Delta_2$ のとき $(P,Q_{\Delta_1})<(P,Q_{\Delta_2})$ と決める。この順序があるとき、$Q_{\Delta_1}=Q_{\Delta_2}\oplus\sum_{\delta\in\Delta_2-\Delta_1}\oplus R_\delta$ であることに注意しておく。この順序が半順序であることは明らかであるが、さらに帰納的半順序集合であることを示す。$(P,Q_{\Delta_{i_1}})<(P,Q_{\Delta_{i_1}})<\cdots$ を整列部分集合とする。$\Delta=\bigcap_{j\geq 1}\Delta_{i_j}$ とおくと、f の $\sum_{\delta\in\Delta}\oplus R_\delta$ への制限写像は、依然として全射準同形である。よって、(P,Q_Δ) は上限を与える。すなわち、$P\oplus Q_\Delta = P\oplus\bigcap_{j\geq 1}Q_{\Delta_{i_j}} = \sum_{\delta\in\Delta}\oplus R_\delta$ である。

さらに詳しく述べると、$P\oplus Q_\Delta$ は各 Δ_{i_j} に対し、$P\subset\sum_{\delta\in\Delta_{i_j}}\oplus R_\delta$ から、$P\subset\bigcap_{j\geq 1}\sum_{\delta\in\Delta_{i_j}}\oplus R_\delta = \sum_{\delta\in\Delta}\oplus R_\delta$ と与えられる。よって、$(P\oplus Q_\Gamma)\bigcap\sum_{\delta\in\Delta}\oplus R_\delta = \sum_{\gamma\in\Gamma}\oplus R_\gamma\bigcap\sum_{\delta\in\Delta}\oplus R_\delta$ であり、したがって、$P\oplus(Q_\Gamma\bigcap\sum_{\delta\in\Delta}\oplus R_\delta) = \sum_{\delta\in\Delta}\oplus R_\delta$ および $Q_\Gamma\bigcap\sum_{\delta\in\Delta}\oplus R_\delta = Q_\Delta$ となる。

ツォルンの補題より、極大元 (P,Q_Λ) がある。前段の証明で、任意の元 $\alpha\in\Lambda$ に対し、$(P,Q_{\Lambda-\{\alpha\}})$ もまた、この半順序集合の中にあることを示した。これは、極大元であることに矛盾する。よって、Γ は空集合である。 □

定理 3.2 から、射影加群に対して、中山・東屋の補題が成り立つことがわかる。

定理 3.3 ([2, 7]). 環 R の Jacobson 根基を $J(R)$ とする。射影加群 P が $PJ(R)=P$ を満たせば、$P=0$ である。

証明. $PJ(R)=P$ は、任意の原始右イデアル I に対し $PI=P$ となることを意味している。すなわち、P の剰余加群は単純加群にならない。よって、P は極大部分加群を持たないが、これは定理 3.2 に反する。 □

例 2.6 の中に現れる加群 M は、$MJ(R)=M$ を満たす非射影加群である。そこで、一般には中山・東屋の補題は、非射影的無限生成加群では成立しないことがわかる。

命題 3.1 と定理 3.2 から次の定理が得られる。

定理 3.4. 射影加群 P が唯一の極大部分加群を持てば、P は直既約である。

無限生成直既約加群 P の例は、[4] で紹介されている。この例を再掲し、実際、ある一つの極大イデアル J に対して、$MJ \neq M$ であり、他の極大イデアル I に対しては、$MI = M$ となることを確認してみる。

例 3.5. R を区間 $[0,1]$ で連続な実関数よりなる可換環とする。各 $x \in [0,1]$ に対し、$\mathfrak{m}_x = \{f \in R |\ f(x) = 0\}$ は極大イデアルである。P_x を、ある x の近傍で $f(t) = 0$ となる $f \in R$ よりなるイデアルとする。このとき、P_x は無限生成直既約加群であることが、[4] で示されている。実際、これは [5] により加算生成である。また、P_x は単純加群 $R/\mathfrak{m}_x$ に同型な剰余加群を持たない。しかし、P_x は、各 $y \neq x$ に対し、$P_x\mathfrak{m}_x = P_x$ かつ $P_x\mathfrak{m}_y \neq P_x$ より、単純加群 $R/\mathfrak{m}_y$ に同型な剰余加群を持つ。 □

注意 3.6. 先の命題 3.1 では、(2) は生じないので意味がないように見える。また、直既約であることを証明するだけなら、唯一の極大部分加群は命題 2.4(6) より $L = PJ(R)$ となったので、$P = P_1 \oplus P_2$ と零でない 2 つの直和になれば、$P_1J(R) \oplus P_2$ と $P_1 \oplus P_2J(R)$ の異なる 2 つの極大部分加群を持つことから、簡単にわかってしまう。

しかし、命題 3.1 の証明を改良すると、射影加群であるという仮定がなくても、この定理が成立する [9]、ということから、証明手法に大きな意味があると言える。勿論、射影加群でない場合は、(2) が起きる場合もある。

中山・東屋の補題についても、定理 3.3 の証明を改良すると、有限生成加群の直和の直和因子である加群について成立することがわかるであろう [9]。 □

4. Ware の問題について (On Ware's problem)

環 R 上の射影加群 P が唯一の極大部分加群を持つとすると、定理 3.4 より、P は直既約であり、[5] から可算生成である。$\{a_1, a_2, \cdots\}$ を P の生成元の集合とする。各 n に対し、$a_{n+1} \notin a_1R + a_2R + \cdots + a_nR$ となるとき、この集合を**極小生成系**と呼ぶ。

補題 4.1. P を直既約射影加群とする。零でない任意の元 $a \in P$ に対し、$a = a_1$ である極小生成系が存在する。

証明. P が可算生成で有限生成ではないとする。このとき、ある生成系 $\{b_1, b_2, \cdots\}$ を取れる。$a_1 = a$ とおく。t_1 を $b_t \notin a_1R$ となる最小の自然数とするとき、$a_2 = b_{t_1}$ とおく。$b_1R + \cdots + b_{t_1}R \subset a_1R + a_2R$ かつ $t_1 \geq 1$ に注意する。帰納的に a_n を次のように決める。t_n を $b_{t_n} \notin a_1R + \cdots + a_nR$ となる最小の自然数とするとき、$a_{n+1} = b_{t_n}$ とおく。$1 \leq t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n$ であるので、$n \leq t_n$ である。よって、各 n に対し、$b_1R + \cdots + b_{t_n}R \subset a_1R + \cdots + a_{n+1}R$ であるので、$\{a_1, a_2, \cdots\}$ が求める生成系である。□

補題 4.2. 直既約射影加群 P が唯一の極大部分加群 L を持つとする。このとき、P の極小生成系 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ で、$a_1 \notin L$ かつ $a_i \in L$ $(i \geq 2)$ となるものがある。

証明. $a_1 \in P$ で $a_1 \notin L$ となる元を一つ選ぶ。補題 4.1 より、ある極小生成系 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ がある。さらに、このような極小生成系のうち、$i \geq 2$ に対し、次のように $a_i \in L$ となるものを選び直していく。L は P の唯一の極大部分加群で $a_1 \notin L$ であるので、$a_1R + L = P$ である。そこで、ある $r \in R$, $b \in L$ で $a_2 = a_1r + b$ となる。$a_2 \notin L$ である場合、a_2 を $a_2 - a_1r \in L$ で置きかえても、$a_2x = (a_2 - a_1r)x + a_1rx$ かつ $a_1R \subset a_1R + a_2R = a_1R + (a_2 - a_1r)R$ なのでこの集合は、依然 $a_2 \in L$ となる極小生成系である。部分加群 $a_1R + \cdots + a_nR$ $(n = 3, 4, \cdots)$ に、この操作を順次繰り返し、求める極小生成系を得る。 □

上記の考察から、Wareの問題が成立する必要十分条件を極小生成系を用いて記述できる。

定理 4.3. 環 R 上の直既約射影加群 P が唯一の極大部分加群 L を持つとする。$\{a_1, a_2, \cdots\}$ を $a_1 \notin L$ かつ $a_i \in L$ $(i \geq 2)$ を満たす P の極小生成系とする。ある局所巾等元 $e \in R$ で $P = eR$ となる必要十分条件は、ある自然数 t で $a_1R + \sum_{i \geq t} a_iR \neq P$ となることである。このとき、L は P の最大の極大部分加群で $L = eJ(R)$ である。

証明. 局所巾等元 e があり $P = eR$ となるなら、$a_1 \notin L$ である極小生成系では $t = 1$ より、明らかに極小生成系の定義の条件が成り立つ。

逆に、仮定を満たす極小生成系があるとする。この条件を満たす最小の t を取ると $\{a_1, a_{t-1}, a_t, a_{t+1} \cdots\}$ も極小生成系になるので、$t = 3$ としてよい。そこで、仮定より $M = a_1R + \sum_{i \geq 3} a_iR \neq P$ である。同型 $0 \neq P/M = (a_2R + M)/M \cong a_2R/(a_2R \bigcap M)$ と自然な全射準同形 $f : R \to a_2R \to a_2R/(a_2R \bigcap M)$ を考える。ここで、$f \neq 0$ より $\ker f \neq R$ である。そこで、$\ker f \subset I$ となる極大右イデアル I を取る。零でない準同形 $R/\ker f \to R/I$ があるので、P/M から単純加群 R/I への零でない準同形がある。この準同形の核を H/M とすると、H/M は P/M の極大部分加群である。よって、H は P の極大部分加群である。ここで、$M \subset H$ より $a_1 \in H$ なので、$H \neq L$ である。これは L が P の唯一の極大部分加群であることに反する。よって、$\{a_1\}$ が生成系、すなわち、P は巡回加群である。

唯一の極大部分加群を持つ巡回射影加群が局所射影加群であることは、冒頭でも述べた通りよく知られている。そこで、ある局所巾等元 e があり $P = eR$ となる。 □

注意 4.4. 上記の定理から、有限生成でない直既約射影加群 P が唯一の極大部分加群 L を持つとき、$a_1 \notin L,\ a_i \in L$ $(i \geq 2)$ である極小生成系に対しては、任意の自然数 $t \geq 2$ として、$\{a_1, a_t, a_{t+1}, \cdots\}$ も極小生成系になる。すなわち、$a_1R + \sum_{i \geq t} a_iR = P$ となる。これは、a_1 以外の有限個の元を極小生成系から取り除いた集合も、依然極小生成系を成すことを示している。

定理 4.5. 唯一の極大部分加群 L を持つ有限生成でない直既約射影加群 P の $a_1 \notin L,\ a_i \in L$ $(i \geq 2)$ を満たす任意の極小生成系に対して、任意の自然数 $t \geq 2$ として、有限個の元を取り除いた集合 $\{a_1, a_t, a_{t+1}, \cdots\}$ も極小生成系になる。すなわち、$a_1R + \sum_{i \geq t} a_iR = P$ となる。

5. 補足説明 (Supplementary Explanation)

唯一の極大部分加群を持つ射影加群について、[1] で述べられている主張を記載しておく。$\mathrm{Hom}_S(M, -)$ が直和と可換になるとき、U_S は**準スモール** (quasi-small) と呼ばれる。[1](2003年) ではこのように呼ばれているが、これは 1978 年に、カテゴリー同値の考察で既に [8] で、著者の佐藤により考察されている。

定理 5.1 ([1]). U_S を環 S 上の単列加群とし、その準同型環を $R = \mathrm{End}_S(U)$ とする。また、K を $f \in R$ で全射でない準同形全体の集合、L を $f \in R$ で単射でない準同形全体の集合とする。このとき、次は同値ある。

(1) U_S は準スモールでない。

(2) U_S は可算生成で、単純左 R 加群 ${}_RR/K$ は平坦加群であり $\sum_{f \in K} f(U_S) = U_S$ である。

この条件が成り立つとき、${}_RK$ は有限生成でない直既約射影加群である。また、${}_RK/J(R)K \cong {}_RR/L$ で、これらは単純左加群である。

$\sum_{f\in K} f(U_S) = U_S$ が成立する加群は、[8] 等で、カテゴリー同値との関係で**自己生成加群** (self-generator) と呼ばれ考察されている。

ここで、例 2.6 を用いて、上記の加群の例を一つ与えておく。

例 5.2. 先に挙げた例 2.6 の記号を用いることにする。環 S は局所環で U_S は単列加群であった。実際、U_S の部分加群は、$\frac{1}{2} \le i \le 1$ として、基底 $\{v_x \mid \frac{1}{2} \le x < i\}$ よりなる部分加群 $J_i/J_{\frac{1}{2}}$ と、基底 $\{v_x \mid \frac{1}{2} \le x \le i\}$ よりなる部分加群 $\overline{J_i}/J_{\frac{1}{2}}$ がある。ここでは、煩雑さを避けるため、それぞれの部分加群を $J_i, \overline{J_i}$ と同じ記号を用いて表すことにする。

U_S は、射影加群ではないが、定理 4.5 の条件を満たす有限生成でない可算な生成系を持っている。すなわち、単調増加列 $x_0 = \frac{1}{2} < x_1 < x_2 < \cdots$ で、各 i について $x_i < 1$ かつ $\lim_{i\to\infty} x_i = 1$ となるものを任意に取ると、$\{v_{x_i}\}$ は可算集合の生成系になる。なお、この生成系から有限個の元を取り除いても依然として生成系を成している。

最初に、U_S の自己準同形環を $R = \mathrm{End}_S(U)$ とおいたとき、R は K を唯一の極大イデアルに持つ局所環で、${}_RR/K$ は単純左 R 加群であることを確かめてみる。
U の自己準同形を f とすると、$f(U)$ は U の部分加群で、閉加群にならないので、ある $f(U) = J_i$ $(i > \frac{1}{2})$ になる。$\frac{1}{2} < s < t < i$ で $f(J_s) = J_p, f(J_t) = J_q, s = th$ として、$J_s = J_{th} = J_t v_h$ より、$J_p = f(J_s) = f(J_t v_h) = f(J_t)v_h = J_q v_h = J_{qh}$ から、$p = qh$ となり $p < q$ である。すなわち、f はイデアルの包含での順序関係を保持する。$f(J_x) = f(J_1 J_x) = f(UJ_x) = f(U)J_x = J_i J_x = J_{ix}$ より、$\ker f = J_{\frac{1}{2i}} \ne 0$ となる。すなわち、f が全射であること、単射であること、同型であることは同値になる。これより $K = \mathrm{rad}(R)$ となる。$f \in K$ は定義から全射でないが、$1-f$ も全射でなければ $1 = (1-f)+f \in R$ となるので、$1-f$ は全射である。したがって、同型である。よって、R は $K = \mathrm{rad}(R)$ を唯一の極大イデアルに持つ局所環で、${}_RR/K$ は単純左 R 加群である。

次に、本質的な事実として、U_S は準スモールでないことを検証してみる。
$r_1 = 1$ となる単調減少列 r_i $(i = 1, 2, \cdots)$ で $r_i > \frac{1}{2}$ かつ $\lim_{i\to\infty} r_i = \frac{1}{2}$ となるものを取る。このとき、各 $i = 1, 2, \cdots$ に対し、準同形 $f_i : U \to J_{r_i}$ を $f_i(v_x) = v_{r_i} \cdot v_x$ と v_{r_i} の積で定義する。このとき、$j \le \frac{1}{2r_i}$ について、$jr_i \le \frac{1}{2}$ より $f(v_j) = 0$ となる。すなわち、$\ker f_i = \overline{J_{\frac{1}{2r_i}}}$ である。そこで、$\alpha : U_S \to \prod_{i\in\mathbb{N}} J_{r_i}$ を、$\alpha(v_x) = \prod_{i\in\mathbb{N}}(f_i(v_x))$ で決める。各 v_x について、$r_i x \le \frac{1}{2}$ となる r_i を取ると、上の事実から、$j > r_i$ について $r_j x < r_i x < \frac{1}{2}$ より、$f_j(v_x) = 0$ となるので、$f_j(v_x) \ne 0$ となる j は有限個である。したがって、α は直和への準同形 $\alpha : U_S \to \sum_{i\in\mathbb{N}} \oplus J_{r_i}$ となっている。一方、定義からわかるように、α の像は有限個の直和には含まれないので、U_S は準スモールでない。

ここで、$\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(U) = U$ であるので、${}_RU$ は自己生成的であることがわかる。

最後に、K が可算生成で有限生成でない加群であることを確認してみる。
単調増加列 $\frac{1}{2} < r_1 < r_2 < \cdots$ で、$r_i < 1, \lim_{i\to\infty} r_i = 1$ となるものを取る。各 i に対し、全射 $f_i : U \to J_{r_i}$ を取ると、$r_j = r_i h < r_i$ に対し、$f_j : U \to J_j$ の全射は $f_j = f_i v_h$ でえられるので、$f_1, f_2, \cdots$ は極小生成系である。一方で、単調増加列から有限個の値を取り除

いても単調増加列より、$\{f_i\}$ から有限個の準同形を除いても極小生成系になっている。したがって、有限生成でないことがわかる。

K が射影的か否かおよび $K/J(R)K \cong R/L$ となっているか、の二点については下記の注意のように疑義が生じる。[1] を信用すれば、K は射影加群で $K/J(R)K \cong R/L$ となっているはずである。もし射影的なら $g_{i+1}g_i = g_i$ となる極小生成系 $\{g_i\}$ が取れることになる。もし、取れないとすれば、[1] の結果を疑わねばならなくなるであろう。 □

注意 5.3. 上記も含めて例 5.2 から生じる幾つかの疑問点を挙げておく。
R は局所環であり、$K = J(R)$ と取ったので、$K = L = J(R)$ であることに注意する。

(1) $K/J(R)K \cong R/L$ であるとは、$K/K^2 \cong R/K$ を意味する。R/K は同型写像のなす集合の同値類である。しかし、例 5.2 では、K の全射でない準同形 $f : U \to J_i \subset U$ は、$i = (\sqrt{i})^2, \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} \le \sqrt{i} < 1$ より、$f_i = (f_{\sqrt{i}})^2$ となり、K^2 に入る。すなわち、$K = K^2$ であり、$K/K^2 = 0$ で矛盾が生じる。
(2) K が射影的で、上記のように $K = K^2$ なら、$J(R)K = K$ が成り立ち、射影加群に対する中山・東屋の補題 (定理 3.3 および [2, 7]) より $K = 0$ となり矛盾が生じる。
(3) $K/J(R)K \cong R/L$ が成立しないと、K が唯一の極大部分加群 $J(R)K$ を持つという主張は成り立たなくなる。

これらについても、興味ある読者は検証をして欲しい。

6. 謝辞 (Acknowledgment)

シンポジューム期間中に、講演の内容について、山口大学の倉富要輔先生に既存の結果について多くのことを教えて頂き、本報告集の内容を正確なものとすることができました。ここに深く感謝の意を表します。

References

[1] A. Facchini, D. Herbera, I. Sakhajev, *Finitely Generated Flat Modules and a Characterization of Semiperfect Rings*, Comm. in Algebra, Vol.**31** No.9(2003), 4195–214.
[2] F.W. Anderson, K.R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, GTM **13**, Springer-Verlag (1992).
[3] I.N. Hernstein, *Noncommutative Rings*, The Carus Mathematics Monographs 15, The Mathematical Association of America, (1968).
[4] S. Hinohara, *Projective modules II*, The sixth proceeding of Japan algebraic symposium (Homological algebra and its applications), Vol.**6** (1964), 24—28.
[5] I. Kaplansky, *Projective modules*, Ann. of Math. Vol.**68** (1958), 372—377.
[6] ———, *Fields and Rings*, The university of Chicago Press, Chixago (1969).
[7] W.K. Nicholson, M.F. Yousif, *Quasi-Frobenius Rings*, Cambridge University Press (2002).
[8] M.Sato, *Fuller's theorem on equivalences*. J. Algebra **52** (1978), 274-284.
[9] ———, *Generalization of Nakayama-Azumaya Lemma and its application*, preprint.
[10] C.P. Waker, *Relative homological algebra and abelian groups*, Illinois. J. Math. Soc. **10** (1966), 186-209.
[11] R. Ware, *Endomorphism rings of projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **155** (1971), 233-256.

Faculty of Regional Policy,
Institute of Regional Research of Chubu
Aich University
Toyohashi, Aichi 441-8522 JAPAN
E-mail address: msato@yamanashi.ac.jp